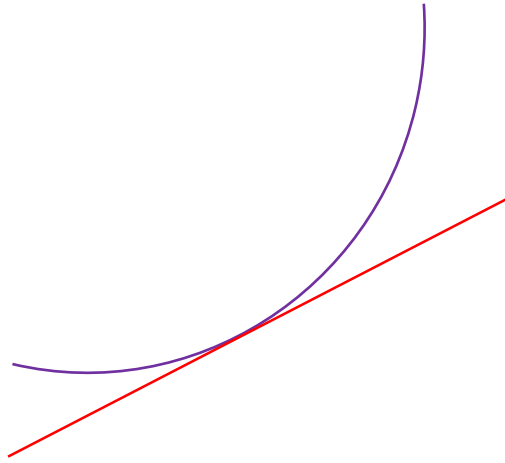


# מתמטיקה

## הכנה למבחן פטור MBA



גיא סלומון

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

**לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)**  
**הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.**

**[www.GooL.co.il/hedva1.html](http://www.GooL.co.il/hedva1.html): לדוגמאות:**

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

3	.....	<b>פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה</b>
6	.....	<b>פרק 2 - חקירת פונקציה</b>
11	.....	<b>פרק 3 – נגזרת סתומה</b>
13	.....	<b>פרק 4 – פונקציות בשני משתנים לכלכלנים</b>
15	.....	<b>פרק 5 – פונקציות הומוגניות, משפט אוילר</b>
17	.....	<b>פרק 6 – קיצון של פונקציה בשני משתנים</b>
19	.....	<b>פרק 7 – קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים</b>
22	.....	<b>פרק 8 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שלושה משתנים</b>

**תרגילים – פרק 1**  
**גזירה של פונקציה**

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

**פתרונות**

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (7)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (10)$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (9)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (11)$$

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (12)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (13)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

**תרגילים – פרק 2****חקירת פונקציה**

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים\*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות\*\*, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול\*\*\*, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

**הערות:**

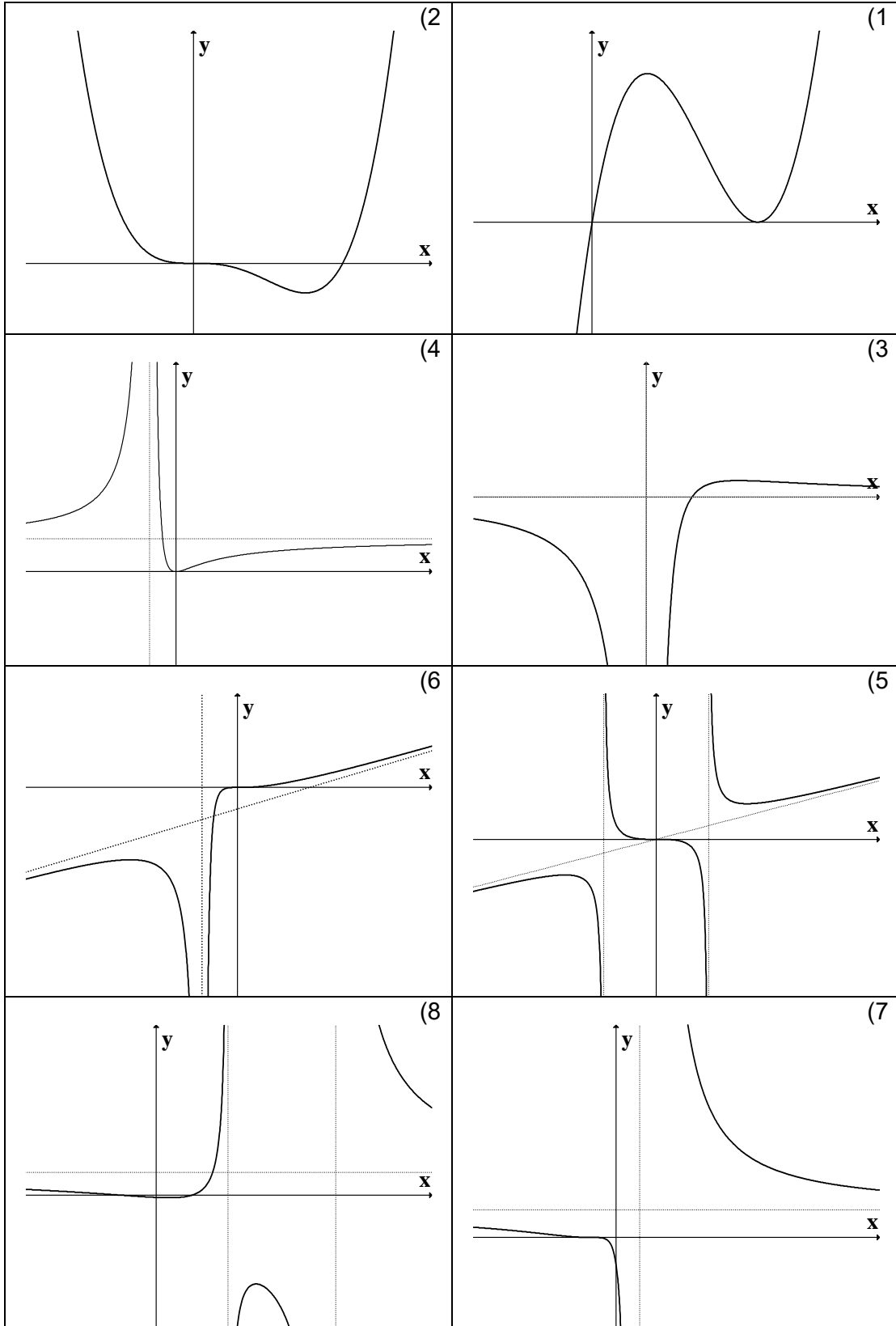
\* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר  $x$ . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

\*\* בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

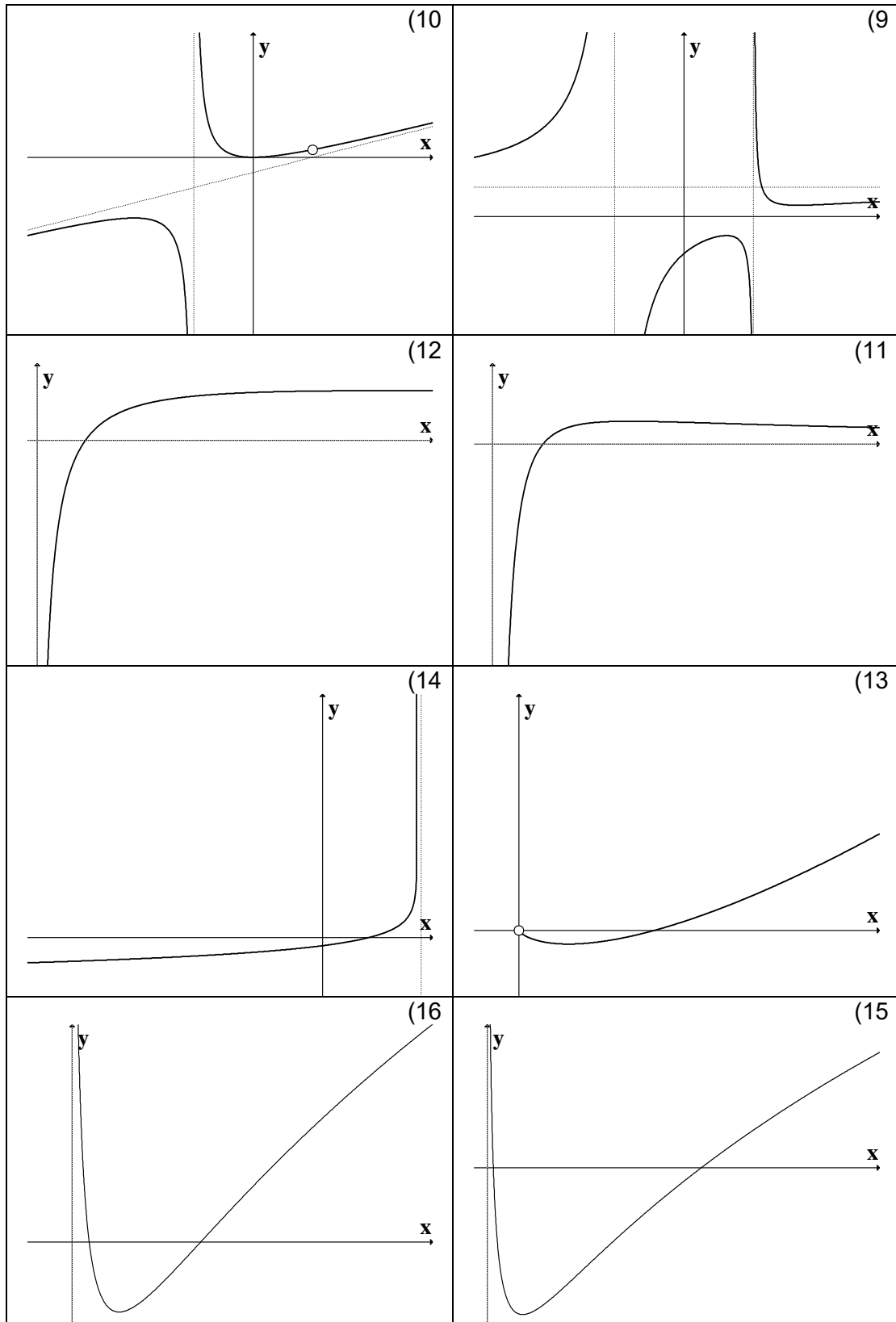
\*\*\* בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

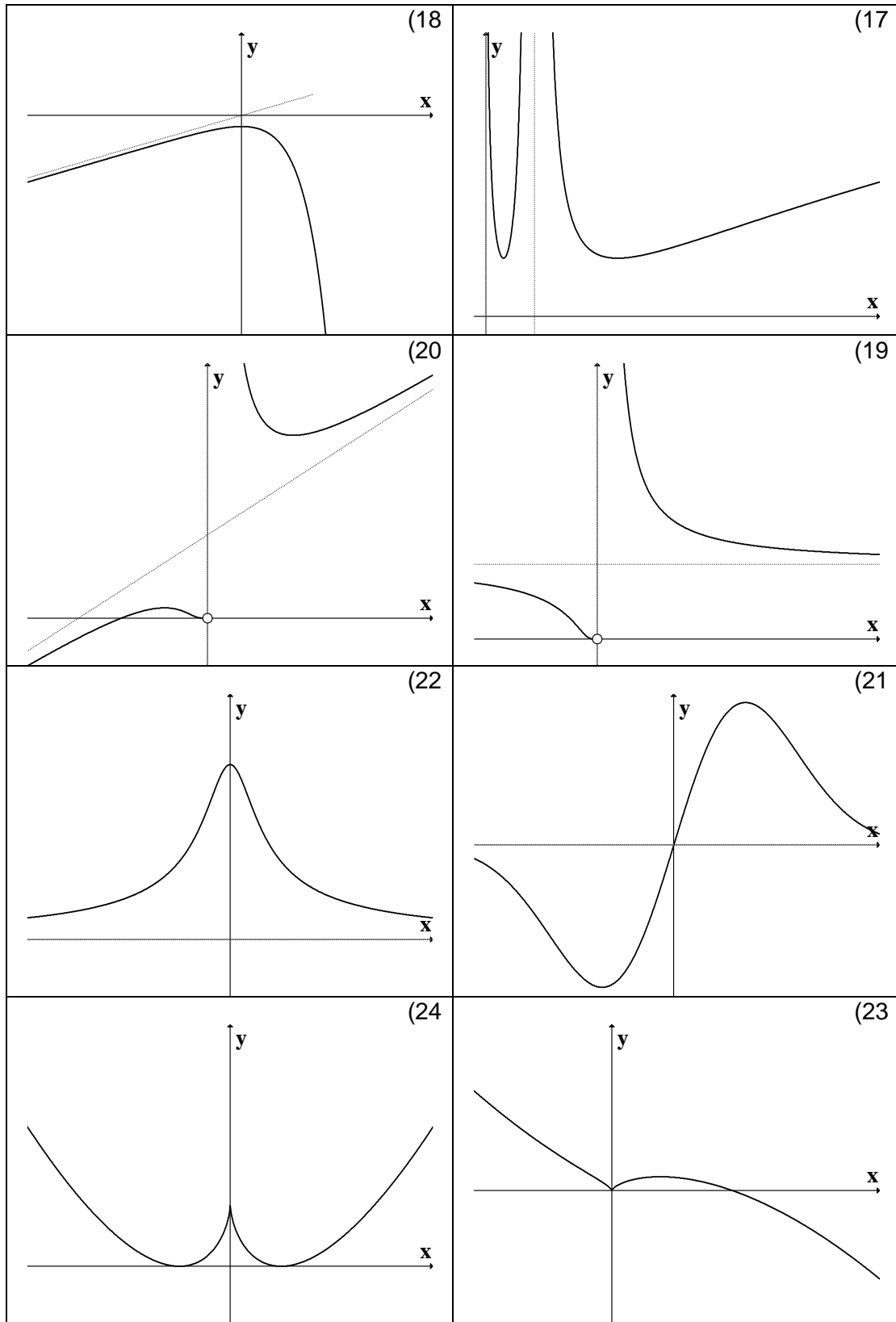
פתרונות

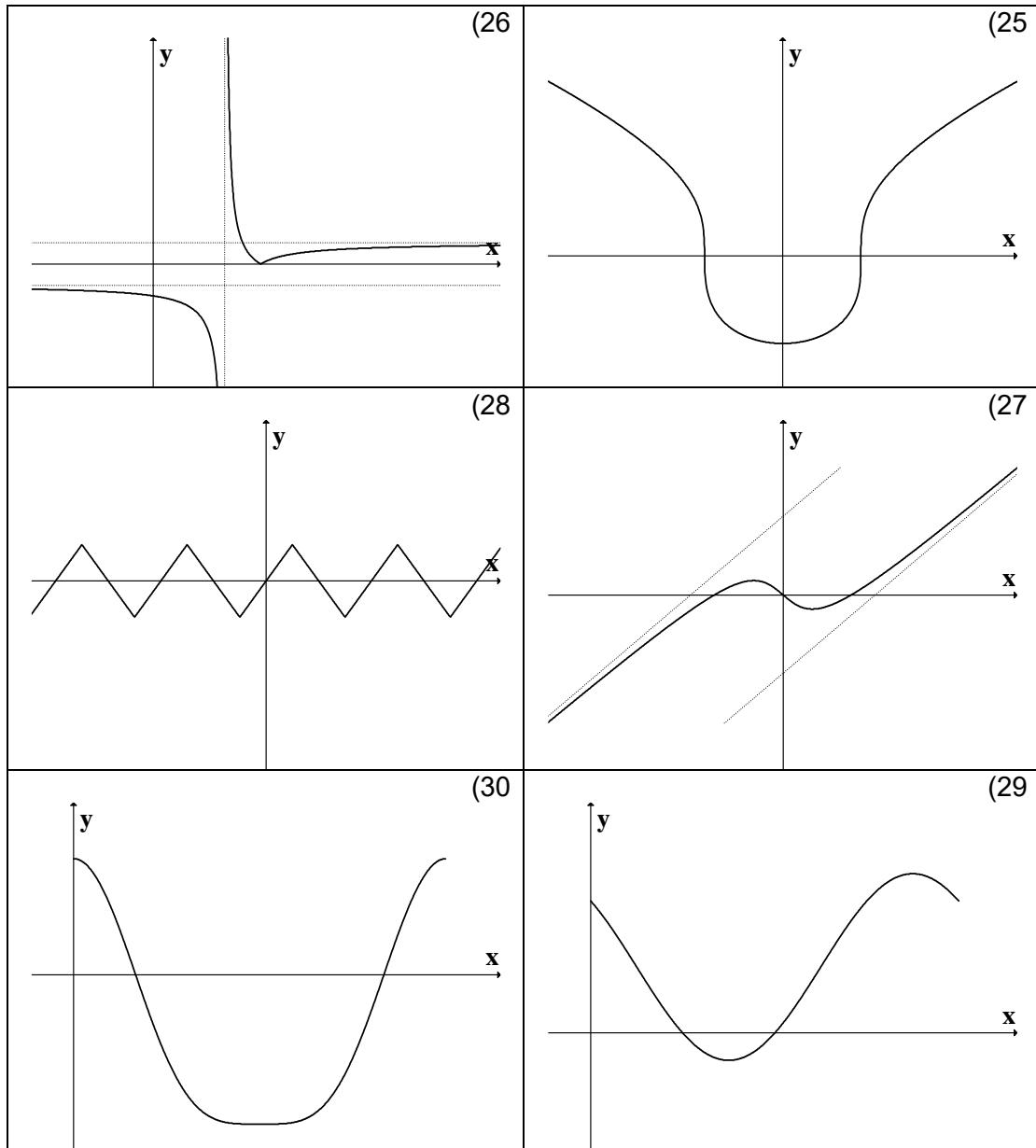
(1)











**תרגילים - פרק 3**  
**נגזרת סתומה**

- בסרטון זה הסבר על נגזרת סתומה.

גזור את הפונקציות הבאות:

$$4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \quad .2$$

$$x^2 + y^5 - y = 1 \quad .1$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad .3$$

.4 מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה  $(3,4)$ .

.5 מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $xy^2 + y - x = xy$  דרך הנקודה  $(1,1)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.

.6 מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1$  דרך הנקודה  $(1,2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.

.7 מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $\sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2$  דרך הנקודה  $(1,2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.

.8 מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $x^2 y^3 + e^{x-2y} = 2x + y$  דרך הנקודה  $(2,1)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.

.9 מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה  $e^{xy^2} + y = y^2 - 1$  דרך הנקודה  $(0,2)$  הנמצאת על גרף הפונקציה.

.10 נתונה הפונקציה הסתומה  $x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$ .

א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן  $y = 0$ .

ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים של גרף הפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף א'.

.11 גזור את הפונקציה הסתומה  $x^y - xy = 10$ .

.12 גזור את הפונקציה הסתומה  $x^y - y^x = 1$ .

.13 נתונה פונקציה סתומה  $xy - y^3 + x^2 - x = 0$ . מצא את ערך  $y''$  בנקודה בה  $y = 1$ .

**פתרונות**

$$y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y}, \frac{10}{y} - 2y \neq 0 \quad (2) \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1}, 5y^4 - 1 \neq 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5) \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4) \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}, \sqrt{x} \neq 0, 1 \quad (3)$$

$$\cdot 8 \quad (10) \quad y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (9) \quad y = -\frac{1}{3}x + 1 \frac{2}{3} \quad (8) \quad y = \frac{1}{5}x + 1 \frac{5}{6} \quad (7) \quad y = \frac{1}{5}x + 1 \frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \ln x - x}, (x^y \ln x - x \neq 0) \quad (11) \quad y = -x, y = x - 1 \quad \text{ב.} \quad (0, 0), (1, 0)$$

$$-1 \quad (13) \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}}, \left( x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0 \right) \quad (12)$$

**תרגילים - פרק 4**  
**פונקציות בשני משתנים לכלכלנים**

**עקומות שוות ערך**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$  באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ .

$$. \text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ . הנח כי } x, y \geq 0$$

שרטט את העקומות שוות הערך  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי  $u(x, y) = (x + p)(y + q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות  $(1, 6)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(0, 14)$  מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקצית התועלת.

מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

**נגזרות חלקיות**

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

**תרגילים - פרק 5**  
**פונקציות הומוגניות, משפט אוילר**

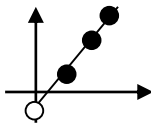
- א. פונקצית התועלת  $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$  הומוגנית. הנח כי  $m$  קבוע חיובי.
- ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$ .
- ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי  $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$ .

**שאלה 2**

- תהי  $f(x, y)$  פונקציה הומוגנית מסדר  $m$  המקיימת  $f(6, 3) = 243$  ו-  $f(2, 1) = \sqrt{27}$ .
- א. מצא את סדר ההומוגניות,  $m$ .
- ב. בנקודה  $(6, 3)$  עוברת עש"ע של  $f$ . מעבירים משיק לעש"ע בנקודה הנ"ל. המשיק הוא  $2x + 3y = 21$ . מצא את  $f_x(1, 0.5)$ ,  $f_y(2, 1)$ ,  $f_x(2, 1)$ .

**שאלה 3**

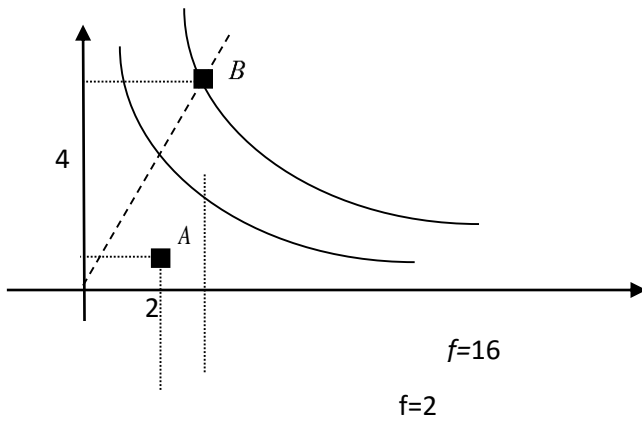
- תהי  $g(t)$  פונקציה של משתנה אחד.
- על הפונקציה  $g$  ידוע כי  $g(4) = 5$ ,  $g(1) = 3$ ,  $g'(8) = 2$ .
- המשתנה  $t$  תלוי במשתנים החיוביים  $(x, y)$  כך:  $t = \frac{4y}{x}$ .
- מגדירים תועלת  $u$  כפונקציה של המשתנים  $(x, y)$  באופן הבא:  $u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$ .



- א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1. מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?
- ב. הוכח כי הקרן  $4y - x = 0$  היא עקומת אדישות של התועלת. צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.
- ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?
- ד. הוכח כי  $u_x(1, 2) = -16$ .



## שאלה 4



הפונקציה  $f(x, y)$  הומוגנית מסדר 3 .  
הנתונים בשרטוט.

א. מצא את שיעורי הנקודה B .

ב. מצא את ערך הסכום  $f_x(4, 8) + 2f_y(4, 8)$  .

ג. נגדיר פונקציה חדשה  $u(x, y)$  על ידי  $u(x, y) = (f(x, y))^2$

1. לפי כללי הגזירה מתקיים  $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$  . הסבר זאת בקצרה.

2. הוכח כי  $x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y) = 6(f(x, y))^2$  . היעזר ב-1 ובנתונים על  $f$  .

**תרגילים - פרק 6**  
**קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)**

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח

הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא 6\$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא 8\$.

מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$

למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם

את הרווח? מהו רווח זה?

### פתרונות

- (1)  $(-0.5, 1)$  אוקף ; מינימום  $(1.5, -3)$ .
- (2)  $(1, 2)$  מינימום ;  $(-1, -2)$  מקסימום ;  $(-1, 2)$  ,  $(1, -2)$  אוקף.
- (3)  $(0, 0)$  אוקף ;  $(1, 1)$  מינימום.
- (4)  $(-1, 1)$  ,  $(-1, -1)$  מינימום ;  $(1, 0)$  מקסימום ;  $(-1, 0)$  ,  $(1, 1)$  ,  $(1, -1)$  אוקף.
- (5)  $(0, 2)$  מקסימום. (6)  $(4, 4)$  מקסימום.
- (7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9)  $z = 3$  ,  $z = 4$  . (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$  .
- (12)  $P_1=10\$$  ,  $P_2=12\$$  , רווח מקסימלי 288\$ .

**תרגילים - פרק 7**  
**קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')**

**פונקציות של שני משתנים**

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה.      ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה.      ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x + 3y = 12$ , מצא את זו שמכפלת

שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$  מצא את הנקודות

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית

הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר  $3x - 6y + 4 = 0$  לפרבולה

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$$

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0)$  מהישר  $ax + by + c = 0$  הוא  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

(10) מוישלה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \quad \text{נתונה על ידי } (x, y)$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא  $x^2 + y^2 = 13$ .

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ לדני תועלת } y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצור פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ . המחירים ליחידת K ו-L הם

$P_K = 2, P_L = 1$ . היצור נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

$(K^*, L^*)$  המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצור (אל תפתור).

## פתרונות

$$\begin{array}{llll} \text{Max}(0, \pm 1) & \min(\pm 1, 0) & (2) & \text{Max}(\pm 1, \text{ml}) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (1) \\ \text{Max}(\pm 2, 1) & \min(\pm 2, 1) & (4) & \text{Max}(2, 3) & \min(-2, -3) & (3) \\ & \text{Max}(9, 36) & (6) & & \text{Max}(6, 2) & (5) \\ \text{Max}(\pm 1, \text{ml}) & \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) & (8) & & (6, 2) & (7) \\ & \min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) & (10) & & 7 / \sqrt{45} & (9) \\ & \text{Max}(2, 3) & (12) & & \text{Max}(6, 2) & (11) \\ & & & \min\{2K + L\} & ; \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 & (13) \end{array}$$

**תרגילים - פרק 8**  
**קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')**

**פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ**

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה  $(1, 2, 2)$  ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה  $(1, 2, 2)$ .

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה  $(1, 2, 3)$  למישור  $-2x - 2y + z = 0$ .

ב. מצא נק' על המישור  $-2x - 2y + z = 0$  שהיא הקרובה ביותר לנק'  $(1, 2, 3)$ .

ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח  $z^2 = xy + 1$  הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד  $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור  $3x + 4y + 12z = 288$ .

רמז: מרחק הנקודה  $(x_0, y_0, z_0)$  מהמישור  $ax + by + cz + d = 0$  הוא

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים**

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל  $x^2 + y^2 = 1$

והמישור  $z = x + y$  לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{והמישור } z = x + y \quad \text{לבין ראשית הצירים.}$$

### הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

### **פתרונות**

- (1) רוחב 4 מ", אורך 4 מ", גובה 2 מ" .
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה (2, 4, 4) .
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה (-2, -4, -4) .
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$  .
- (4)  $(0, 0, 1)$  ,  $(0, 0, -1)$  .
- (5) מרחק קצר ביותר  $\frac{256}{13}$  . מרחק ארוך ביותר  $\frac{320}{13}$  .
- (6) מרחק מינימלי 1 . מרחק מקסימלי  $\sqrt{3}$  .
- (7) מרחק מינימלי  $\frac{75}{17}$  . מרחק מקסימלי 10 .